Les nombres relatifs

Définition :

Un nombre relatif est un nombre précédé d'un signe.
Si ce signe est "+", le nombre est dit positif.
Si ce signe est "-", le nombre est dit négatif.

Définition :

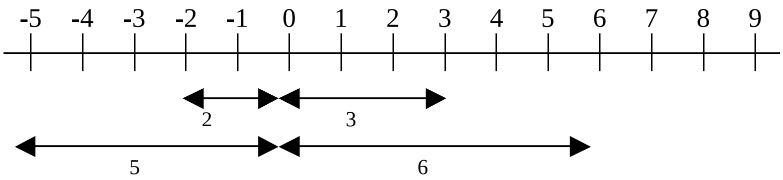
La distance à zéro d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce :

La distance à zéro d'un nombre est le nombre privé de son signe.

Exemples :

La distance à zéro de -5 est 5.
La distance à zéro de -2 est 2.
La distance à zéro de +3 est 3.
La distance à zéro de +6 est 6.

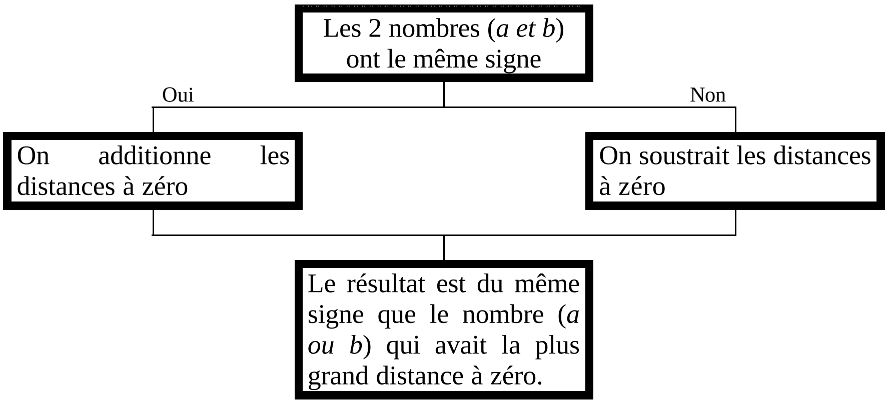


Convention :

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété :

Pour additionner deux nombres relatifs (a + b), on procède comme suit :



Exemples :

5 + 3 : 5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif, donc **5 + 3 = 8**.
(-5)+(-3) : -5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif, donc **(-5)+(-3)= -8**.
5 + (-3) : 5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif, donc **5 + (-3)= 2**.
(-5) + 3 : -5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif, donc **(-5) + 3 = -2**.

Définition :

L'opposé d'un nombre a est le nombre note –a tel que a + (-a) = 0.

Astuce :

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples :

L'opposé de 2 est noté –2 et vaut -2
L'opposé de -2 est noté –(–2) et vaut 2.

Définition :

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples :

Soustraire 2 c'est additionner –2.
Soustraire 5 c'est additionner –5.
Soustraire -4 c'est additionner 4.
Soustraire -7 c'est additionner 7.

Astuce :

- 2 = + (-2)
- 5 = + (-5)
- (-4) = + 4
- (-7) = +7

Exemples de soustraction:

5 – 2 = 5 + (-2) = 3   4 – 5 = 4 + (-5) = -1   5 – (-4) = 5 + 4 = 9   6 – (-7) = 6 + 7 = 13

Comment calculer une somme algébrique ?

On transforme les soustractions en additions et on effectue les sommes séparées des termes positifs et négatifs. On termine en additionnant ces deux résultats (sans oublier le signe devant la somme des nombres négatifs).

Exemple :

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = (-5) + 3 + (-4) + 5 + (-3) + (-4) + 7 = (-5) + (-4) + (-3) + (-4) + 3 + 5 + 7 = (-16) + 15 = -1

Astuce :

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple :

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = -5 + 3 -4 + 5 + -3 + -4 + 7 = -5 -4 -3 -4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1

Remarque :

On peut "confondre" le symbole – de la soustraction avec le symbole – qui se trouve devant un nombre et lui donne son signe.

Exemple :

-5 – 4 peut se comprendre :

- -5 auquel on soustrait 4 ; cela s'écrit (-5) - 4
- -5 auquel on additionne -4 ; cela s'écrit (-5) + (-4)

Propriété : règle des signes

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits :

5 × 2 = + 10	5 × (-2) = - 10	(-5) × 2 = - 10	(-5) × (-2) = + 10
Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.	Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.

Propriété :

La règle des signes s'appliquent aussi pour les divisions.

Exemples de quotients :

10 ÷ 2 = 5	10 ÷ (-2) = -5	(-10) ÷ (-2) = 5	(-10) ÷ 2 = -5
Les 2 nombres ont le même signe, le quotient est positif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le quotient est négatif.	Les 2 nombres ont le même signe, le quotient est positif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le quotient est négatif.

Propriété :

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 …), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …), le produit est négatif.

Exemples :

$2 \times 5 \times \underline{(-4)} \times 3 \times \underline{(-4)} \times \underline{(-4)} \times 5$ est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

$2 \times \underline{(-5)} \times \underline{(-4)} \times 3 \times \underline{(-4)} \times \underline{(-4)} \times 5$ est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

ⓘ ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété :

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions.
3. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple :

$10 + 5 \times (3 - (3 + 5 \times 7)) = 10 + 5 \times (3 - (3 + 35)) = 10 + 5 \times (3 - (38)) = 10 + 5 \times (-35) = 10 + (-175) = -165$

1°) Recopier et compléter les deux "nids d'abeilles" ci-dessous en respectant la règle correspondante

2	- 3
- 6	

On effectue
$2 \times (-3)$

2	- 3	- 1	2	3

- 1				
1				
-1				
2				
16				

2°)a - Deux nombres non nuls ont un produit positif et une somme négative.
Quel est leur signe ? Justifier.

b - Quel est le signe du produit de deux nombres non nuls dont la somme est égale à zéro ? Justifier.

3°) Dans un produit de 14 nombres, il y a 7 facteurs positifs. Quel est le signe de ce produit ? Justifier !

4°) Placer les neuf nombres : -7, -5, -3, -2, 0, 2, 3, 5 et 7 dans les neuf cases de tableau de façon que les produits des trois nombres d'une même ligne ou d'une même colonne soient égaux aux valeurs indiquées.

			→ - 98
			→ 0
			→ - 75
↓ - 20	↓ 0	↓ - 105	

5°) Trouver toutes les façons de décomposer –15 en un produit de trois entiers relatifs.

6°) On veut compléter le carré magique ci-dessous de façon que tous les entiers relatifs de -8 à 7 soient placés dans les seize cases et que en faisant la **somme** des quatre nombres placés sur une ligne, sur une colonne ou sur une diagonale, on trouve toujours le même résultat : ***s***.

a- Calculer la somme des nombres entiers de -8 à 7 : (-8) + (-7) + … + 6 + 7.
En déduire la valeur de ***s***.

b- Compléter le carré magique.

-8	3		
	-2	2	
		1	
		-4	

7°) En Alaska, près du détroit de Béring, les températures moyennes mensuelles sont en degré centigrades :

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
-14	-13	-12	-5	1	6	9	8	5	0	-7	-14

Calculer la température moyenne annuelle dans cette région.

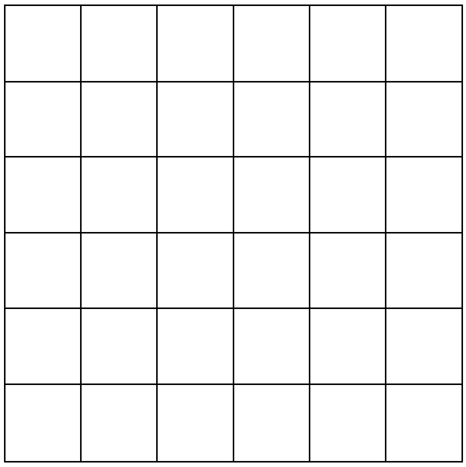
8°) Dans un produit de 16 nombres, il y a 7 facteurs positifs. Quel est le signe de ce produit ? Justifier !

9°) Calculer :

A = $1+2\times3-2\times15\div6$ B = $(-2)\times(-3)\times(4)\times(-5)\div6$ C = $(-2)+(-3)+(4)+(-5)+6$

D = $(-2)+(-3)-(4)-(-5)+6$ E = $(2-3\times(5-2\times(4-3)))\times2+1$ F = $1+(2-(3\times(4+(5-(6\div(-2))))))$

10°) Combien y a-t-il de carrés dans la figure ci-contre ?



Solutions :

1°)

2	*- 3*	*- 1*	*2*	*3*
- 6	**3**	**- 2**	**6**	
- 18	**- 6**	**- 12**		
108	**72**			
7776				

- 1	**- 1**	**1**	**2**	**- 1**
1	**- 1**	**2**	**- 2**	
-1	**- 2**	**-4**		
2	**8**			
16				

2°)a - Si deux nombres non nuls ont un produit positif, ils sont de même signe. Si, en plus, leur somme est négative, c'est qu'ils sont tous les deux négatifs..

b - Si la somme de deux nombres est 0, c'est qu'ils sont opposés, donc de signes contraires, donc leur produit est négatif.

3°) Dans un produit de 14 nombres, s'il y a 7 facteurs positifs, c'est qu'il y a 14-7 = 7 facteurs négatifs. Or 7 est impair, donc il y a un nombre impair de facteurs négatifs, donc le produit est négatif.

4°)

-2	**7**	**- 7**	® *- 98*
2	**0**	**- 3**	® *0*
5	**3**	**- 5**	® *- 75*
- 20	*0*	*- 105*	

5°) La seule décomposition de 15 en produit de 3 entiers positifs est $1 \times 3 \times 5$.
Pour que le produit soit négatif, il faut qu'il y ait un nombre impair de facteurs négatifs, donc ici 1 ou 3.
Les solutions sont donc : $(-1) \times 3 \times 5$; $1 \times (-3) \times 5$; $1 \times 3 \times (-5)$ et $(-1) \times (-3) \times (-5)$.

6°) a- La somme de tous les nombres du carré magique est $4 \times s$ car il y a 4 lignes et que la somme de chaque ligne vaut s.

Donc $4\,s = (-8) + (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0$
$+ 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

donc $4\,s = -8$ donc $s = -8/4 = -2$

b-

① Comme la somme de la première diagonale vaut –2, on trouve a = +7.

- 8	3		
	- 2	2	
		1	
		- 4	**a**

② Comme la somme de la troisième colonne vaut -2, on trouve b = -1.

- 8	3	**b**	
	- 2	2	
		1	
		- 4	7

③ Comme la somme de la première ligne vaut -2, on trouve c = 4.

- 8	3	- 1	**c**
	- 2	2	
		1	
		- 4	7

④ Comme la somme de la quatrième colonne vaut -2, on trouve : d + e = -13 donc :
- d = - 6 et e = - 7

ou
- d = - 7 et e = - 6

- 8	3	- 1	4
	- 2	2	**d**
		1	**e**
		- 4	7

⑤ Si d = - 6, comme la somme de la deuxième ligne doit valoir – 2, on aurait f = 4. Or 4 est déjà placé et on ne peut pas mettre deux fois le même nombre, donc on a d = - 7 et e = - 6.

- 8	3	- 1	4
f	- 2	2	*- 6*
		1	*- 7*
		- 4	7

⑥ Comme la somme de la deuxième ligne vaut -2, on trouve f = 5.

- 8	3	- 1	4
f	- 2	2	- 7
		1	- 6
		- 4	7

⑦ Comme la somme de la deuxième diagonale vaut -2, on trouve : g + h = -8 donc :

- g = -5 et h = -3

ou

- g = -3 et h = -5

- 8	3	- 1	4
5	- 2	2	- 7
	g	1	- 6
h		- 4	7

⑧ Si g = -5 et h = -3, comme la somme de la première colonne doit valoir – 2, on aurait i = 4.
Or on ne peut pas mettre deux fois le même nombre, donc g = -3 et h = -5.

- 8	3	- 1	4
5	- 2	2	- 7
i	***-5***	1	- 6
-3		- 4	7

⑨ Comme la somme de la première colonne vaut -2, on trouve i = 6.

- 8	3	- 1	4
5	- 2	2	- 7
i	- 3	1	- 6
- 5		- 4	7

⑩ Comme la somme de la deuxième colonne vaut -2, on trouve j = 0.

- 8	3	- 1	4
5	- 2	2	- 7
6	- 3	1	- 6
- 5	**j**	- 4	7

Donc la solution du problème est :

- 8	*3*	**- 1**	**4**
5	*- 2*	*2*	**- 7**
6	**- 3**	*1*	**- 6**
- 5	**0**	*- 4*	**7**

7°) Calculons la température moyenne :

[(-14) + (-13) + (-12) + (-5) + 1 + 6 + 9 + 8 + 5 + 0 + (-7) + (-14)] / 12
= [(-14) + (-13) + (-12) + (-5) + (-7) + (-14) + 1 + 6 + 9 + 8 + 5] / 12
= [(-65) + 29] / 12 = (-36) / 12 = - 3

Donc la température moyenne annuelle en Alaska est – 3°C.

8°) Si dans un produit de 16 nombres, il y a 7 facteurs positifs, c'est qu'il y a 16-7 = 9 facteurs négatifs. Or 9 est impair donc il y a un nombre impair de facteurs négatifs, donc le produit est négatif.

9°) Calculer :

A = $1+2\times3-2\times15\div6=1+6-30\div6=1+6-5=2$

B = $(-2)\times(-3)\times(4)\times(-5)\div6=-2\times3\times4\times5\div6=-120\div6=-20$

C = $(-2)+(-3)+(4)+(-5)+6=(-2)+(-3)+(-5)+4+6=(-10)+10=0$

D = $(-2)+(-3)-(4)-(-5)+6=(-2)+(-3)+(-4)+5+6=(-9)+11=-2$

E = $(2-3\times(5-2\times(4-3)))\times2+1=(2-3\times(5-2\times(-1)))\times2+1=(2-3\times(5-(-2)))\times2+1$
$=(2-3\times(5+2))\times2+1=(2-3\times7)\times2+1=(2-21)\times2+1=(-19)\times2+1=-38+1=-37$

F = $1+(2-(3\times(4+(5-(6\div(-2))))))=1+(2-(3\times(4+(5-(-3)))))=1+(2-(3\times(4+(5+3))))$
$=1+(2-(3\times(4+8)))=1+(2-(3\times12))=1+(2-36)=1+(-34)=-33$

10°)

Nombre de carrés de 1 carreau de côté = 6×6 = 36
Nombre de carrés de 2 carreaux de côté = 5×5 = 25
Nombre de carrés de 3 carreaux de côté = 4×4 = 16
Nombre de carrés de 4 carreaux de côté = 3×3 = 9
Nombre de carrés de 5 carreaux de côté = 2×2 = 4
Nombre de carrés de 6 carreaux de côté = 1×1 = 1
↓
Total $\boxed{91}$