

Puissances

Définition :

Le nombre noté a^n qui se lit "a exposant n" est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemples :

$$2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \text{ facteurs}} = 32 \qquad 3^4 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \text{ facteurs}} = 81 \qquad (-2)^3 = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2)}{3 \text{ facteurs}} = -8$$

Remarques :

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Ⓢ Ne pas confondre le signe de multiplication "×" avec le signe pour la lettre "x". Il faut adopter une convention d'écriture claire.

Astuce :

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- a est négatif **et** n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 ...).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif **et** n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 ...).

Exemples :

4^5 est positif

$(-4)^5$ est négatif car il y a 5 facteurs négatifs.

$(-10)^8$ est positif car il y a 8 facteurs négatifs.

Propriété :

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple :

$$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3) = 4 \times 5^2 \times (5 - 12) = 4 \times 5^2 \times (-7) = 4 \times 25 \times (-7) = 100 \times (-7) = -700$$

Ⓢ Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$$(-2)^4 = 16 \text{ car } (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

$$-2^4 = -16 \text{ car } -2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction. On calcule d'abord la puissance.

Propriété :

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

Le même nombre
"en bas"

Exemples :

$$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

$$(-2)^4 \times (-2)^5 = (-2)^{4+5} = (-2)^9$$

$$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$$

$$5^5 \times 5^2 = 5^{5+2} = 5^7$$

"Justification" :

$$2^3 \times 2^7 = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \text{ facteurs}} \times \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{7 \text{ facteurs}} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 + 7 = 10 \text{ facteurs}} = 2^{10}$$

Propriété :

$$x^a \times y^a = (x \times y)^a$$

Le même nombre
"en haut"

Exemples :

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2 = 144$$

$$20^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3 = 8 \times 1000 = 8000$$

"Justification" :

$$\begin{aligned} \boxed{2^3} \times \boxed{5^3} &= \boxed{\begin{matrix} 2 \\ \times 5 \end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix} 2 \\ \times 5 \end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix} 2 \\ \times 5 \end{matrix}} \\ &= \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

Propriété :
 $(x^a)^b = x^{a \times b}$

Des puissances imbriquées

"Justification" :

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

Exemples :

$$(2^3)^4 = 5^{3 \times 4} = 2^{12} = 4096$$

$$(10^3)^2 = 10^{3 \times 2} = 10^6 = 1000000$$

$$((-3)^2)^3 = (-3)^{2 \times 3} = (-3)^6 = 729$$

La puissance est "prioritaire"

Propriété :

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

0^0 n'existe pas

Exemples :

$$4^0 = 1$$

$$(-4)^0 = 1$$

$$\pi^0 = 1$$

$$2,7^0 = 1$$

$$(-3,5)^0 = 1$$

$$-4^0 = -1$$

Propriété :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Exposants négatifs

Exemples :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété :

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Exemples :

$$\frac{2^{15}}{2^7} = 2^{15-7} = 2^8 = 256$$

$$\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^{5-(-2)} = 3^7 = 2187$$

$$\frac{5^{15}}{3^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\frac{10^{15}}{10^7} = 10^{15-7} = 10^8 = 100000000$$

$$\frac{10^{15}}{10^{18}} = 10^{15-18} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Propriété :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Exemples :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81}$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{5^3}{3^3} = -\frac{125}{27}$$

$$\frac{40^3}{4^3} = \left(\frac{40}{4}\right)^3 = 10^3 = 1000$$

Remarque :

$$10^{-3} = 0,001 \quad 10^{-2} = 0,01 \quad 10^{-1} = 0,1 \quad 10^0 = 1 \quad 10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \quad 10^4 = 10000$$

Propriété :

Soit n un entier positif.

10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".

10^{-n} s'écrit avec un "0,0...01" avec n "0" au total.

Exemples :

$$10^7 = 1 \quad 0000000$$

7 zéros

$$10^{-8} = 0,0000000 \quad 1$$

8 zéros

Définition :

Un nombre est dit sous la forme scientifique (ou en notation scientifique) s'il s'écrit sous la forme :
 $a \times 10^n$

- où :
- a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).
 - n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique :

$$15$$

Il manque $\cdot 10^{\dots}$

$$10^3$$

Il manque un nombre devant

$$15 \times 10^4$$

Le nombre devant est supérieur à 10.

$$10 \times 10^4$$

Le nombre devant n'est pas strictement inférieur à 10.

$$0,8 \times 10^4$$

Le nombre devant n'est pas supérieur à 1.

$$15 \times 10^{4,5}$$

L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres en notation scientifique :

$$1 \times 10^4 \quad 1,5 \times 10^{-5} \quad -1 \times 10^{42} \quad -9,5 \times 10^{11} \quad -3,14 \times 10^{-5} \quad 5 \times 10^7 \quad 4 \times 10^{-11} \quad -1 \times 10^0$$

Exemples : passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$$4,52 \times 10^4 = 4,52 \times 10000 = 45200 \qquad 4,52 \times 10^{-4} = 4,52 \times 0,0001 = 0,000452$$

Astuces :

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.

Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples : passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$$123,45 = 1,2345 \times 100 = 1,2345 \times 10^2 \qquad 0,012345 = 1,2345 \times 0,01 = 1,2345 \times 10^{-2}$$

$$\underline{123,45} \times 10^5 = \underline{1,2345 \times 100} \times 10^5 = \underline{1,2345 \times 10^2} \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$$

Astuce :

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique, on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples : de calculs avec des nombres en notation scientifique.

- $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = \underline{660} \times 10^{12} = \underline{6,6 \times 10^2} \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$
- $25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = \underline{-10000} \times 10^{-6} = \underline{-1 \times 10^4} \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$
- $0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = \underline{0,011} \times 10^{15} = \underline{1,1 \times 10^{-2}} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$
- $\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$
- $\frac{1,5 \times 10^{12} \times 0,4 \times 10^4}{32 \times 10^{-5}} = \frac{1,5 \times 0,4}{32} \times \frac{10^{12} \times 10^4}{10^{-5}} = \frac{0,6}{32} \times \frac{10^8}{10^{-5}} = 0,01875 \times 10^{13} = 1,875 \times 10^{-2} \times 10^{14} = 1,875 \times 10^{12}$

Utilisation de la calculatrice :

Pour calculer avec les nombres en notation scientifique, on utilise la touche $\boxed{\times 10^x}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ ou $\boxed{\text{EE}}$

L'appui sur cette touche permet d'obtenir en une étape : " $\times 10^x$ ".

Dans la suite, on supposera que la touche correspondante sur la calculatrice est $\boxed{\times 10^x}$

Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$, on tape : $12 \boxed{\times 10^x} 4 \times 55 \boxed{\times 10^x} 8 \boxed{=}$

L'affichage de la machine est $\boxed{6,6 \quad 14}$ qui se lit $6,6 \times 10^{14}$.

❗ Ne pas confondre puissance de 10 et notation scientifique.

$$2 \times 10^5 = 200000 \text{ et } 2^5 = 32.$$

Lorsque la machine affiche $\boxed{2 \quad 5}$, il faut comprendre (**ET ECRIRE**) 2×10^5

1°) Ecrire en notation scientifique : 725 millions, 74 milliards et 71 cent millièmes.

2°) On connaît bien ce jeu qui consiste à répondre à une série de question de plus en plus difficiles en doublant ses gains à chaque bonne réponse et en perdant tout si la réponse est mauvaise.

1^{re} question exacte : 2 F 2^e question exacte : 4 F 3^e question exacte : 8 F ; etc.

a- A combien de questions un joueur a-t-il répondu s'il gagne 128 F ? 1024 F ? 32768 F ?

b- Un joueur a répondu correctement à une série de 20 questions ; combien a-t-il gagné ?

3°) Calculer : (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

4°) Ecrire, sous forme d'une seule puissance, chaque calcul suivant :

$$\left((-3)^2\right)^{-3} \qquad 2^{-5} \times 5^{-5} \qquad \frac{5^2 \times 5^{-4} \times 5^3}{5^{-2} \times 5} \qquad 2 \times 4 \times 8 \times 32$$

5°) La vitesse de la lumière est égale à 3×10^5 kilomètres par seconde. La vitesse du son est égale à 3×10^2 mètres par seconde.

Si tu te trouves à 3 km du lieu où tombe la foudre, combien de temps après sa formation verras-tu l'éclair ? Combien de temps après la chute de la foudre entendas-tu le « coup de tonnerre » ?

6°) Calcule : $\left(\left(\frac{3}{4} \times \frac{15}{12} \times \frac{8}{3}\right)^2 \times \frac{2}{5}\right)^3 \div \frac{25}{4}$

7°) Recopier et compléter le tableau ci-contre :

Horizontalement :

Verticalement :

I : $2^2 \times 3^2 ; 10^4 - 1$

II : Puissance cinquième de trois.

III : 12^4

IV : $\frac{5^7}{5^3} ; 5^4 - 10^2$

V : $20^3 \times 10^2$

VI : $\frac{10^3}{5^2}$

VII : $10^6 + 8 \times 10^5 + 10^3 + 10^2 + 10^0$

A : $(2^3)^5$

B : $2^2 \times 2^4 ; \frac{2^{15}}{2^4}$

C : $13 \times 5^2 \times 10^3$

E : $5^6 \times 6$

F : $\frac{2^7 \times 10^3}{2^2}$

G : $5^3 \times 3 - 10 + 9 \times 10^3$

	A	B	C	D	E	F	G
I							
II							
III							
IV							
V							
VI							
VII							

8°) Calculer :

On donnera les résultats sous la forme de fractions les plus simples possibles.

$$A = 2 - \frac{3}{2} \quad \left| \quad B = \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} \quad \left| \quad C = \frac{9}{24} \div \frac{27}{36} \quad \left| \quad D = 2 + \frac{4}{3} \times \frac{-1}{5} \quad \left| \quad E = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} \quad \left| \quad F = \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 \quad \left| \quad G = 5 + \frac{11-5}{11+5} \times \frac{8}{3}$$

9°) Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

0,0000578

230 795,15

761×10^{-4}

10°) Remplacer chaque symbole par l'entier naturel qui convient.

$3^{25} = 3^8 \times 3^\blacklozenge$

$(2,5)^\blacklozenge \times (2,5)^3 = (2,5)^7$

$(0,4)^\blacklozenge \times (0,4) = (0,4)^2$

$a \times a^n \times a^\blacklozenge = a^{n+3}$

Solutions

1°) 725 millions = $7,25 \times 10^8$

74 milliards = $7,4 \times 10^{10}$

71 cent millièmes = $7,1 \times 10^{-4}$

2°)

Nombre de réponses exactes	4	...	7	...	10	...	15	...	20
Gain (en F)	16	...	128	...	1024	...	32768	...	1 048 576

Le gain à la question n est 2^n .

3°) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{16}{16} + \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{32}{16} = 2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} - \frac{8}{16} + \frac{4}{16} - \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

4°) $\left((-3)^2\right)^{-3} = (-3)^{2 \times (-3)} = (-3)^{-6}$ $2^{-5} \times 5^{-5} = (2 \times 5)^{-5} = 10^{-5}$

$\frac{5^2 \times 5^{-4} \times 5^3}{5^{-2} \times 5} = \frac{5^{2+(-4)+3}}{5^{(-2)+1}} = \frac{5^1}{5^{-1}} = 5^{1-(-1)} = 5^2$ $2 \times 4 \times 8 \times 32 = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^5 = 2^{1+2+3+5} = 2^{11}$

5°) On verra l'éclair après $\frac{3}{3 \times 10^5} = 10^{-5}$ s soit 10 microsecondes

La vitesse du son est 3×10^2 m/s soit 3×10^{-1} km/s

On entendra le tonnerre après $\frac{3}{3 \times 10^{-1}} = 10^1 = 10$ secondes

6°) $\left(\left(\frac{3}{4} \times \frac{15}{12} \times \frac{8}{3}\right) \times \frac{2}{5}\right)^3 \div \frac{25}{4} = \left(\left(\frac{3}{4} \times \frac{3 \times 5}{2 \times 2 \times 3} \times \frac{4 \times 2}{3}\right) \times \frac{2}{5}\right)^3 \div \frac{25}{4} = \left(\left(\frac{5}{2}\right) \times \frac{2}{5}\right)^3 \div \frac{25}{4} = \left(\frac{5 \times 5}{2 \times 2} \times \frac{2}{5}\right)^3 \div \frac{25}{4}$
 $= \left(\frac{5}{2}\right)^3 \div \frac{25}{4} = \frac{125}{8} \div \frac{25}{4} = \frac{125}{8} \times \frac{4}{25} = \frac{25 \times 5}{4 \times 2} \times \frac{4}{25} = \frac{5}{2}$

7°)

	A	B	C	D	E	F	G
I	3	6		9	9	9	9
II	2	4	3		3		3
III	7		2	0	7	3	6
IV	6	2	5		5	2	5
V	8	0	0	0	0	0	
VI		4	0			0	
VII	1	8	0	1	1	0	1

8°)

A = $2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

B = $\frac{2}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{10} = \frac{4}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$

C = $\frac{9}{24} \div \frac{27}{36} = \frac{9}{24} \times \frac{36}{27} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4 \times 2} \times \frac{4 \times 9}{9 \times 3} = \frac{1}{2}$

D = $2 + \frac{4}{3} \times \frac{-1}{5} = 2 + \frac{-4}{15} = \frac{30}{15} + \frac{-4}{15} = \frac{26}{15}$

E = $\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{5^2}{6^2} - \frac{2}{3} = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} = \frac{25}{36} - \frac{24}{36} = \frac{1}{36}$

F = $\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

G = $5 + \frac{11-5}{11+5} \times \frac{8}{3} = 5 + \frac{6}{16} \times \frac{8}{3} = 5 + \frac{48}{48} = 5 + 1 = 6$

9°)

$0,0000578 = 5,78 \times 10^{-5}$

$230\,795,15 = 2,3079515 \times 10^5$

$761 \times 10^{-4} = 7,61 \times 10^{-2}$

10°) $3^{25} = 3^8 \times 3^\diamond$
 $\diamond = 17$

$(2,5)^\blacklozenge \times (2,5)^3 = (2,5)^7$
 $\blacklozenge = 4$

$(0,4)^\spadesuit \times (0,4) = (0,4)^2$
 $\spadesuit = 1$

$a \times a^n \times a^\heartsuit = a^{n+3}$
 $\heartsuit = 2$