

# Les fractions

## Définition :

Un nombre en écriture fractionnaire s'écrit sous la forme  $\frac{a}{b}$  ← le numérateur .  
b ← le dénominateur

## Définition :

On parle de fraction lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

## Propriété :

 Addition de fractions de même dénominateur

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

## Exemples :

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \quad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \quad \frac{-1}{2} - \frac{8}{2} = \frac{-1-8}{2} = \frac{-9}{2} \quad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15-(-8)}{6} = \frac{-15+8}{6} = \frac{-7}{6}$$

## Propriété :

 Egalité de fractions.

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{ac}{bc}$$

## Exemples :

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{35}{14} \quad \frac{3}{7} = \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \quad \frac{72}{24} = \frac{72 \div 2}{24 \div 2} = \frac{36}{12} = \frac{36 \div 2}{12 \div 2} = \frac{18}{6} = 3 \quad \frac{45}{25} = \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

## Définition :

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

## Remarque :

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

On verra en 3<sup>ème</sup> une méthode où l'on est sûr de simplifier au maximum (Le PGCD). Pour la 4<sup>ème</sup>, la calculatrice le fait ...

## Comment :

 Transformer une écriture fractionnaire en fractions ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateurs entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, ...).

↳ Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

## Exemples :

$$\frac{5,2}{2} = \frac{5,2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52}{20} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \quad \frac{4,5}{3,7} = \frac{4,5 \times 10}{3,7 \times 10} = \frac{45}{37} \quad \frac{4,51}{3,7} = \frac{4,51 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

## Définition :

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

## Remarque :

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

## Propriété :

 Addition de fractions de dénominateurs différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

## Exemples :

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{2 \times 3} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \quad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{34 \times 51} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

## Remarque :

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici  $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$ .

**Astuce :**

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun au deux dénominateurs (ici 34 et 51). Pour cela, on écrit la table des multiples de chacun des deux nombres et on prend le plus petit multiple qui se trouve dans les deux listes.

102 est le plus petit multiple commun à 34 et 51. Il est inutile de poursuivre la liste des multiples.

|                 |    |     |     |     |
|-----------------|----|-----|-----|-----|
| Multiples de 34 | 34 | 68  | 102 | ... |
| Multiples de 51 | 51 | 102 | ... |     |

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

*h Cette méthode peut être très longue ...*

**Signes :** des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

**Exemples :**

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{-3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

**Propriété :** Multiplication de fractions

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

|  |
|--|
| $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ |
|--|

**Astuce :**

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

**Exemples :**

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{5}{-3} \times \frac{-8}{4} = \frac{5 \times 8}{3 \times 4} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.

Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

$$\frac{3}{4} \times \frac{-5}{6} = -\frac{15}{24} = -\frac{5}{8}$$

$$5 \times \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{5}{-3} \times 2 = \frac{5}{-3} \times \frac{2}{1} = -\frac{10}{3}$$

**Définition :**

Prendre une fraction d'une quantité c'est multiplier cette quantité par la fraction.

**Exemples :**

Prendre  $\frac{4}{5}$  de 1200 c'est prendre  $\frac{4}{5} \times 1200 = \frac{4 \times 1200}{5} = \frac{4800}{5} = 960$ .

Prendre 15% de 320 € c'est prendre  $\frac{15}{100}$  de 320 € c'est prendre  $\frac{15}{100} \times 320 = \frac{15 \times 320}{100} = \frac{4800}{100} = 48$  €.

**i**  $2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5}$  mais  $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$

**Définition :**

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté :  $a^{-1}$ .

**Propriété :**

L'inverse du nombre a vaut  $\frac{1}{a}$ .

L'inverse de la fraction  $\frac{a}{b}$  est  $\frac{b}{a}$ .

**Exemples :**

|         |               |                               |               |                               |                |                     |
|---------|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|----------------|---------------------|
| Nombre  | 2             | -5                            | $\frac{3}{4}$ | $\frac{-5}{6}$                | $-\frac{6}{7}$ | 0                   |
| Inverse | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{6}{-5} = -\frac{6}{5}$ | $-\frac{7}{6}$ | <b>N'existe pas</b> |

**i** Ne pas confondre inverse et opposé.  
L'opposé de 2 est  $-2$ . L'inverse de 2 est  $\frac{1}{2}$ .

**Définition :**

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

**i** On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et pas celui qui est avant.

**Exemples :**

Diviser par 5 c'est multiplier par  $\frac{1}{5}$ .

Diviser par  $\frac{3}{4}$  c'est multiplier par  $\frac{4}{3}$ .

Diviser par  $-\frac{4}{7}$  c'est multiplier par  $-\frac{7}{4}$ .

**Exemples :**

$$\frac{3}{2} \div 5 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \quad \frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \quad \frac{5}{2} \div \frac{-4}{7} = \frac{5}{2} \times \frac{-7}{4} = -\frac{35}{8} \quad 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

**Remarque :**

- $\frac{3}{5}$  est une notation de  $3 \div 5$  qui vaut 0,6.
- Il n'est pas possible de donner une valeur décimale pour toutes les fractions (exemple :  $\frac{1}{3} \approx 0,33$ ).

**i** Attention à la position, du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0,17 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \div \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

**Exemples : de calculs complexes**

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \div \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) = \left( \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) \div \left( \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{-4}{1} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{20}{24} - \frac{21}{24}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{-1}{24}} = -\frac{5}{4} \times \frac{24}{1} = -\frac{5}{4} \times \frac{6 \times 4}{1} = -\frac{30}{1} = -30$$

$$-1 - \frac{5}{12} \div \left( \frac{66}{99} - \frac{18}{12} \right) = -1 - \frac{5}{12} \div \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) = -1 - \frac{5}{12} \div \left( \frac{4}{6} - \frac{9}{6} \right) = -1 - \frac{5}{12} \div \frac{-5}{6} = -1 - \frac{5}{2 \times 6} \times \frac{6}{-5} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) \times \frac{13}{14} = \left( \frac{9}{6} - \frac{2}{6} \right) \times \frac{13}{14} = \frac{7}{6} \times \frac{13}{14} = \frac{13}{12} = \frac{13}{12} \times \frac{21}{13} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

**1°)** Calculer

$$A = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$$

$$D = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$$

$$G = 2 - \frac{3}{2}$$

$$J = 2 + \frac{4}{3} \times \frac{-1}{5}$$

$$M = 5 + \frac{11-5}{11+5} \times \frac{8}{3}$$

$$B = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$$

$$E = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)$$

$$H = \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$K = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}$$

$$N = \left(3 - \frac{1}{2}\right) \div \left(2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$C = 5 + \frac{11-5}{11+5} \times \frac{8}{3}$$

$$F = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)$$

$$I = \frac{9}{24} \div \frac{27}{36}$$

$$L = \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$P = -\frac{3}{4} + 2 \times \frac{5}{210}$$

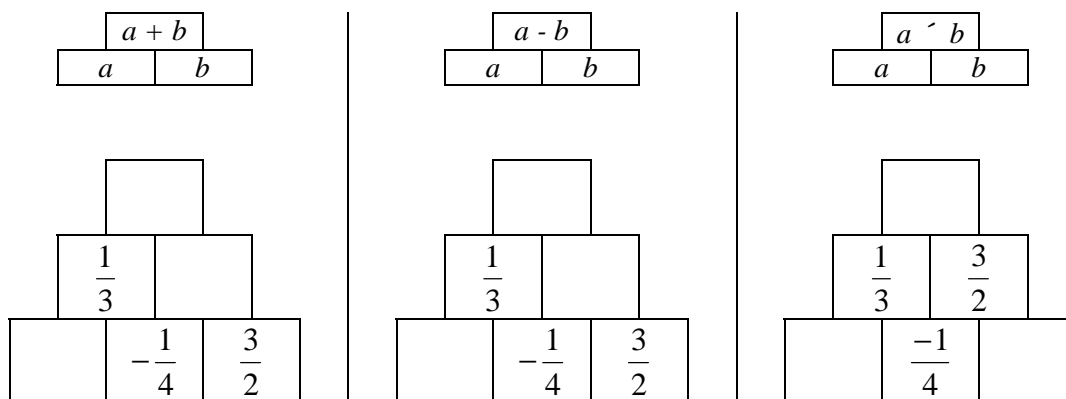
On donnera les résultats sous la forme d'une fraction la plus simple possible ou d'un entier.

**2°)** Dans une classe de 15 garçons et 12 filles,  $\frac{4}{5}$  des garçons et  $\frac{3}{4}$  des filles ont la moyenne au dernier devoir de musique.

Quelle fraction des élèves de cette classe a la moyenne en musique ?

On pourra commencer par calculer combien d'élèves ont eu la moyenne.

**3°)** Recopie et complète les piles suivantes en respectant les règles indiquées au dessus.



Les résultats seront, si possible, simplifiés.

**4°)** Recopie en corrigeant, **dans une autre couleur**, les éventuelles erreurs.

$$D = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$F = \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{24}{15}$$

$$E = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5+1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$G = (-5) + (-3) \times 7 = 8 \times 7 = 56$$

**5°)** Complète le carré **multiplicativement** magique.

Le produit doit être le même sur les lignes, les colonnes et les diagonales.

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
|     |     |     |
| 128 | - 8 | 0,5 |
| 1   |     |     |

# Solutions

1°) Calculer

$$A = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{10}{18} = \frac{3}{18} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18}$$

$$C = 5 + \frac{11-5}{11+5} \times \frac{8}{3} = 5 + \frac{6}{16} \times \frac{8}{3} = 5 + \frac{48}{48} = 5 + 1 = 6$$

$$D = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{2 \times 3} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

$$E = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\right) = \frac{5}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

$$F = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{1}{6} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{1} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$G = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$H = \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{10} = \frac{4}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{9}{24} \div \frac{27}{36} = \frac{9}{24} \times \frac{36}{27} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4 \times 2} \times \frac{4 \times 9}{9 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$J = 2 + \frac{4}{3} \times \frac{-1}{5} = 2 + \frac{-4}{15} = \frac{30}{15} + \frac{-4}{15} = \frac{26}{15}$$

$$K = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{5^2}{6^2} - \frac{2}{3} = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} = \frac{25}{36} - \frac{24}{36} = \frac{1}{36}$$

$$L = \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$M = C$$

$$N = \left(3 - \frac{1}{2}\right) \div \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{8}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \div \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$P = -\frac{3}{4} + 2 \times \frac{5}{210} = -\frac{3}{4} + \frac{10}{210} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{21} = -\frac{63}{84} + \frac{4}{84} = -\frac{59}{84}$$

2°) Calculons le nombre d'élèves qui ont eu la moyenne.

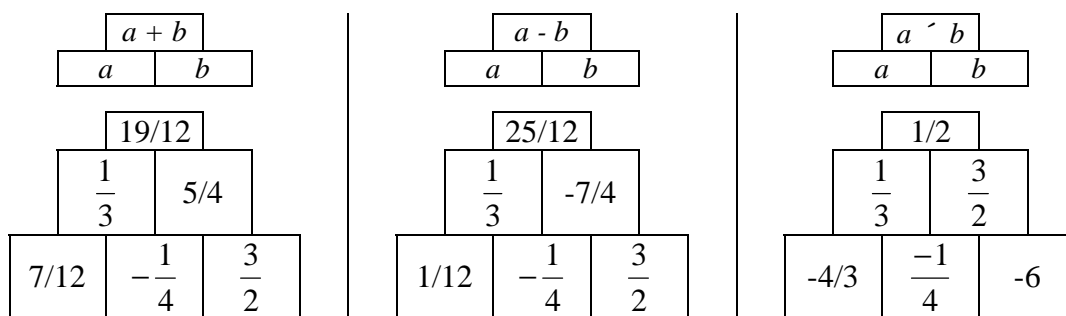
filles :  $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{36}{4} = 9$

garçons :  $\frac{4}{5} \times 15 = \frac{60}{5} = 12$

total :  $9 + 12 = 21$

Donc 21 élèves ont eu la moyenne. La fraction représentée est  $\frac{21}{27}$  soit  $\frac{7}{9}$ .

3°) Recopie et complète les piles suivantes en respectant les règles indiquées au dessus.



4°)

$$D = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$E = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{15}{6} + \frac{5}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$F = \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$G = (-5) + (-3) \times 7 = (-5) + (-21) = -26$$

5°)

Le produit commun est  $128 \times (-8) \times 0,5 = -512$

|     |     |      |
|-----|-----|------|
| - 4 | 2   | 64   |
| 128 | - 8 | 0,5  |
| 1   | 32  | - 16 |