

# Vecteurs, distances et milieux

## 1 - Vecteurs

### Définition :

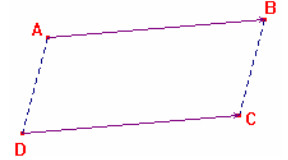
La translation qui envoie le point A sur le point B est associée à  $\overrightarrow{AB}$ , qui se lit "vecteur A B".

### Remarque :

La translation qui envoie B sur A est associée au vecteur  $\overrightarrow{BA}$ . *On ne note pas  $\overline{BA}$ .*

### Définition (rappel) :

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation qui envoie A sur B* si ABCD est un parallélogramme.



### Propriété : admise

- Si ABCD est un parallélogramme alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
- Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  alors ABCD est un parallélogramme.

### Remarque :

Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  alors ABDC est un parallélogramme.

### Propriété :

- Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$  alors B est le milieu de [AC]
- Si B est le milieu de [AC] alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



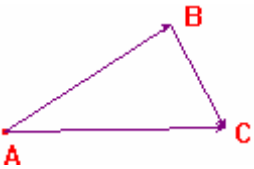
### Démonstration :

Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$  alors ABCB est un parallélogramme donc B est le milieu de [AC].

Si B est le milieu de [AC] alors ABCB est un parallélogramme et donc  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .

### Relation de CHASLES : admise

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



### Remarque :

*Effectuer la translation qui envoie A sur B puis la translation qui envoie B sur C revient à effectuer la translation qui envoie A sur C.*

### Remarque :

La translation qui envoie A sur A laisse la figure inchangée.

### Définition :

On définit le vecteur nul (noté  $\vec{0}$ ) par :  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} \dots$

### Remarque :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$  d'après la relation de Chasles donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BA}$  ont pour somme le vecteur nul. On dit qu'ils sont *opposé* l'un de l'autre et on note :  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

### Comment construire la somme de deux vecteurs ?

1<sup>er</sup> cas : A, B et C étant trois points quelconque, construire  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

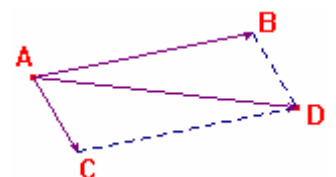
On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  d'après la relation de Chasles.

2<sup>ème</sup> cas : A, B et C étant trois points quelconque, construire  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

On construit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Comme ABCD est un parallélogramme alors  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$  d'après la relation de Chasles.



### Exemple d'exercice :

ABCD est un parallélogramme.

a- Construire le point E tel que  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

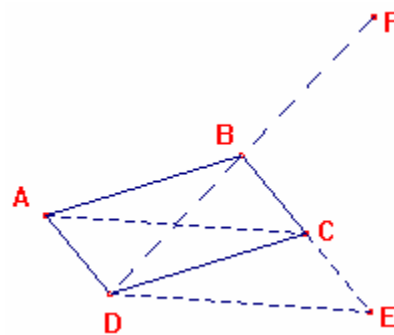
b- Construire le point F tel que  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

a- Comme ABCD est un parallélogramme,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$   
donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  d'après la relation de Chasles.

Donc  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$  donc ACED est un parallélogramme.

b- Comme ABCD est un parallélogramme,  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$   
donc  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$  d'après la relation de Chasles.

Donc  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB}$  (ou  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$ ) donc B est le milieu de [DF].



## 2- Repères et coordonnées

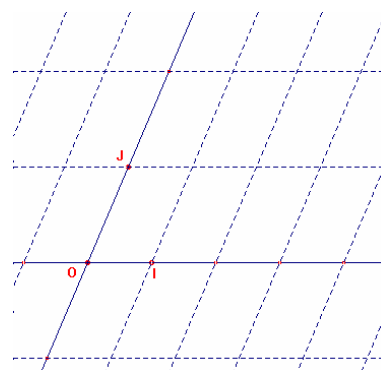
### Définition, notation :

Pour définir un *repère*, il faut donner 3 points non alignés :

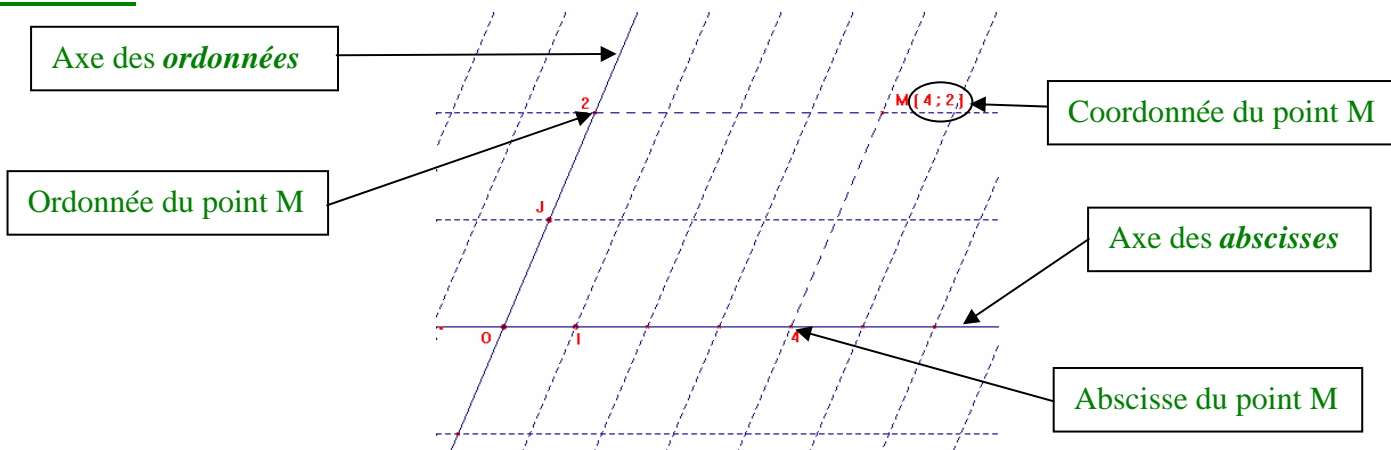
1. un point qui donne l'origine du repère
2. un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
3. un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

Le repère  $(O ; I ; J)$  est un repère pour lequel :

- O est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



### Définition :



### Définition :

Le repère $(O ; I ; J)$ est dit <b>quelconque</b> si ses axes ne sont pas perpendiculaires et si les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.	Le repère $(O ; I ; J)$ est dit <b>normé</b> ou <b>normal</b> si : ▪ $OI = OJ$	Le repère $(O ; I ; J)$ est dit <b>orthogonal</b> si : ▪ $(OI) \perp (OJ)$	Le repère $(O ; I ; J)$ est dit <b>orthonormé</b> ou <b>orthonormal</b> si : ▪ $OI = OJ$ ▪ $(OI) \perp (OJ)$
	Même unité sur les deux axes.	Axes perpendiculaires.	Axes perpendiculaires Même unité sur les deux axes.

### Attention :

Certaines propriétés, ne sont "valables" que dans certains types de repères (souvent orthonormé).

Bien regarder les conditions d'application des propriétés.

Par exemple, la formule de calcul de distance n'est applicable que dans un repère orthonormé.

## 3 - Coordonnées d'un vecteur

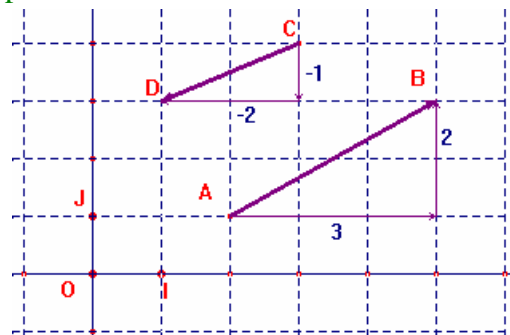
### Définition :

Les *coordonnées du vecteur*  $\overrightarrow{AB}$  correspondent au déplacement parallèlement aux axes.

### Exemple :

Pour aller de A à B, on se déplace de 3 unités sur l'axe des abscisses et de 2 unités sur l'axe des ordonnées. Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont (3 ; 2) et l'on note  $\overrightarrow{AB}$  (3 ; 2).

Pour aller de C à D, on se déplace de -2 unités sur l'axe des abscisses et de -1 unité sur l'axe des ordonnées. Les coordonnées de  $\overrightarrow{CD}$  sont (-2 ; -1) et l'on note  $\overrightarrow{CD}$  (-2 ; -1).



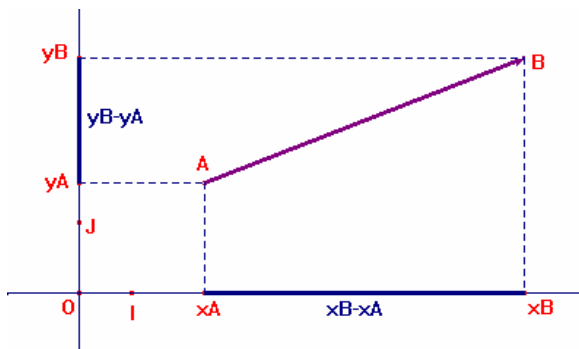
### Propriété :

Soit (O ; I ; J) un repère.

Soit  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points dans ce repère.

Alors :  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

### (Elément de) démonstration :



### Exemple d'exercice :

Soit (O ; I ; J) un repère.

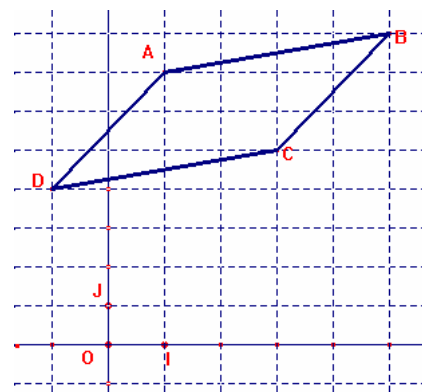
Soit A(1 ; 7), B(5 ; 8), C(3 ; 5) et D(-1 ; 4).

Prouver que ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$  donc  $\overrightarrow{AB}(5 - 1 ; 8 - 7)$  donc  $\overrightarrow{AB}(4 ; 1)$

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D)$  donc  $\overrightarrow{DC}(3 - (-1) ; 5 - 4)$  donc  $\overrightarrow{DC}(4 ; 1)$

Donc  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  donc ABCD est un parallélogramme.



### Exemple d'exercice :

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère.

Soit  $A(2 ; 2)$ ,  $B(4 ; 7)$  et  $C(7 ; 8)$ .

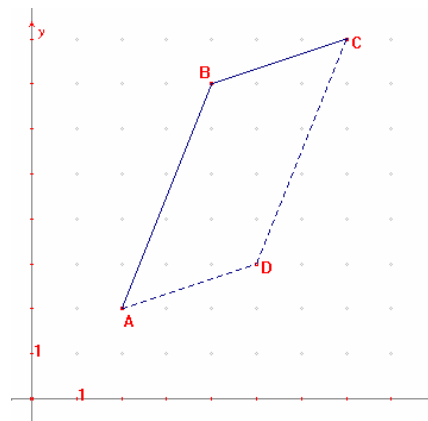
Déterminer les coordonnées de  $D$  pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme.

Soit  $D(x_D ; y_D)$  les coordonnées du point  $D$ .

On a :  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$  donc  $\overrightarrow{AB}(4 - 2 ; 7 - 2)$  donc  $\overrightarrow{AB}(2 ; 5)$

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D)$  donc  $\overrightarrow{DC}(7 - x_D ; 8 - y_D)$

Comme  $ABCD$  est un parallélogramme alors :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  
donc  $2 = 7 - x_D$  et  $5 = 8 - y_D$  donc  $x_D = 5$  et  $y_D = 3$  donc  $D(5 ; 3)$



## 4 - Coordonnées du milieu d'un segment

### Propriété :

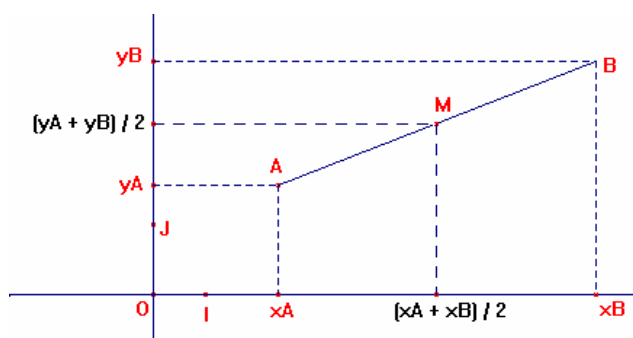
Soit  $(O ; I ; J)$  un repère.

Soit  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points dans ce repère.

Soit  $M$  le milieu de  $[AB]$ .

Alors :  $M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

### (Élément de démonstration) :



### Exemple d'exercice :

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère.

Soit  $A(1 ; 7)$ ,  $B(5 ; 8)$ ,  $C(3 ; 5)$  et  $D(-1 ; 4)$ .

Prouver que  $ABCD$  est un parallélogramme.

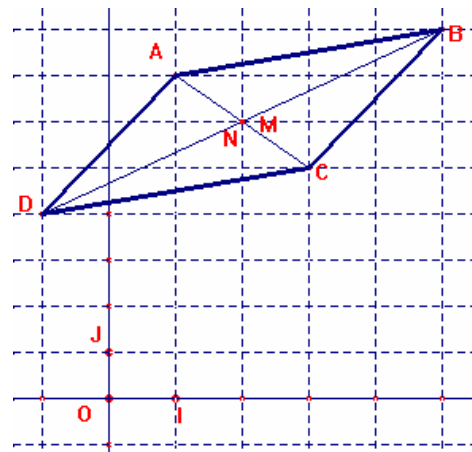
Soit  $M$  le milieu de  $[AC]$ . Alors  $M\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$  donc

$$M\left(\frac{1+3}{2} ; \frac{7+5}{2}\right) \text{ donc } M(2 ; 6)$$

Soit  $N$  le milieu de  $[BD]$ . Alors  $N\left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$  donc

$$N\left(\frac{5+(-1)}{2} ; \frac{8+4}{2}\right) \text{ donc } N(2 ; 6)$$

Donc  $M = N$  donc  $ABCD$  est un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en même point, c'est donc un parallélogramme.



## 5 - Distance entre deux points dans un repère orthonormé

### Propriété :

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère **ORTHONORME**.

Soit  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points dans ce repère.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ ou } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

### Démonstration :

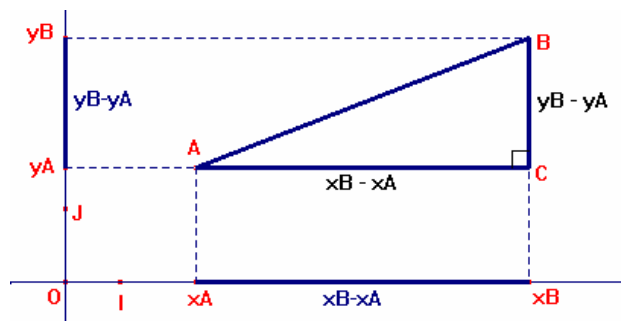
Comme le repère est orthogonal, le triangle ABC est rectangle en C, car  $(AC) \parallel (OI)$  et  $(BC) \parallel (OJ)$  et  $(OI) \perp (OJ)$ .

Comme le repère est normé, l'unité est la même sur AC et sur BC.

Dans ABC rectangle en C; d'après le théorème de Pythagore :  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\text{donc } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\text{donc } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} .$$



### Exemple :

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère orthonormé.

Soit  $A(1 ; 7)$  et  $B(5 ; 8)$ .

Calculer AB.

Comme  $(O ; I ; J)$  est orthonormé,  $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$  donc  $AB^2 = (5 - 1)^2 + (8 - 7)^2$

donc  $AB^2 = 4^2 + 1^2$  donc  $AB^2 = 17$  donc  $AB = \sqrt{17}$ .

### Exemple d'exercice :

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère.

Soit  $A(2 ; 7)$ ,  $B(7 ; 8)$ ,  $C(6 ; 3)$  et  $D(1 ; 2)$

Prouver que ABCD est un losange.

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$  donc  $\overrightarrow{AB}(7 - 2 ; 8 - 7)$  donc  $\overrightarrow{AB}(5 ; 1)$

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D)$  donc  $\overrightarrow{DC}(6 - 1 ; 3 - 2)$  donc  $\overrightarrow{DC}(5 ; 1)$

Donc  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  donc ABCD est un parallélogramme.

Comme  $(O ; I ; J)$  est orthonormé,

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

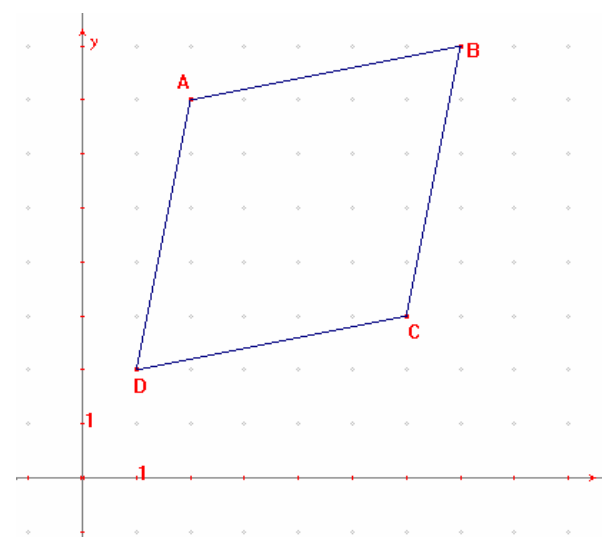
donc  $AB^2 = (7 - 2)^2 + (8 - 7)^2$  donc  $AB^2 = 5^2 + 1^2$

donc  $AB^2 = 26$  donc  $AB = \sqrt{26}$ .

- $CB^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$

donc  $CB^2 = (7 - 6)^2 + (8 - 3)^2$  donc  $CB^2 = 1^2 + 5^2$

donc  $CB^2 = 26$  donc  $CB = \sqrt{26}$ .



Comme ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.